Les arbres binaires

RÉSUMÉ

L'arborescence de fichiers sur un ordinateur, l'organigramme d'une entreprise, l'arbre généalogique d'une famille, l'expression arithmétique $3 \times (2 + 5)$: toutes ces structures ont la forme d'un **arbre**. En informatique, un arbre est une structure hiérarchique où chaque élément (appelé nœud) peut avoir des enfants, mais un seul parent. L'**arbre binaire** (au plus deux enfants par nœud) est la variante la plus étudiée : c'est la base des algorithmes de recherche rapide (arbres binaires de recherche) et des parcours systématiques (préfixe, infixe, suffixe, largeur).

① MÉMO

Vocabulaire

Arbre binaire Structure hiérarchique où chaque nœud a au plus deux enfants (gauche et droit).
Racine Nœud au sommet de l'arbre (sans parent).
Feuille Nœud sans enfant.
Nœud interne Nœud ayant au moins un enfant.
Hauteur Longueur du plus long chemin de la racine à une feuille. Un arbre réduit à un nœud a une hauteur de 0. L'arbre vide a une hauteur de -1 (par convention).
Taille Nombre total de nœuds.
Profondeur d'un nœud Distance (nombre d'arêtes) entre la racine et ce nœud.

Propriétés fondamentales

Pour un arbre binaire de hauteur h et de taille n :
- $h + 1 \leqslant n \leqslant 2^{h+1} - 1$;
- un arbre complet de hauteur h a exactement $2^{h+1} - 1$ nœuds ;
- $\lfloor \log_2(n) \rfloor \leqslant h \leqslant n - 1$.

Arbre binaire de recherche (ABR)

Un ABR est un arbre binaire où, pour chaque nœud :
- toutes les valeurs du sous-arbre gauche sont **inférieures** ;
- toutes les valeurs du sous-arbre droit sont **supérieures**.

La recherche, l'insertion et la suppression sont en $O(h)$, soit $O(\log n)$ si l'arbre est équilibré.

Parcours d'un arbre binaire

Préfixe (préordre) Racine, sous-arbre gauche, sous-arbre droit.
Infixe (inordre) Sous-arbre gauche, racine, sous-arbre droit. Pour un ABR, donne les valeurs dans l'ordre croissant.
Suffixe (postordre) Sous-arbre gauche, sous-arbre droit, racine.
En largeur (BFS) Niveau par niveau, de gauche à droite (utilise une file).

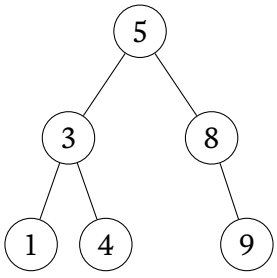
Erreurs classiques

Code erroné	Code correct	Explication
Confondre hauteur et profondeur	Hauteur = plus long chemin **descendant**, profondeur = distance à la **racine**	La hauteur est une propriété de l'arbre (ou d'un sous-arbre) ; la profondeur est une propriété d'un nœud. Ce sont deux mesures distinctes.
Vérifier un ABR en comparant seulement enfant gauche < racine < enfant droit	Propager un intervalle]`mini` ; `maxi`[à chaque nœud	Un nœud peut être inférieur à son parent mais supérieur à un ancêtre plus haut : il faut vérifier la contrainte sur *tout* le sous-arbre.
`def taille(arbre): return 1 + taille(arbre.gauche) + ...`	Ajouter `if arbre is None: return 0`	Sans le cas de base `None`, l'accès à `arbre.gauche` sur l'arbre vide provoque un `AttributeError`.
Insérer des valeurs triées dans un ABR	Utiliser un arbre équilibré (AVL, rouge-noir)	L'insertion de valeurs triées dégénère l'ABR en liste chaînée (hauteur $= n - 1$) : la recherche passe de $O(\log n)$ à $O(n)$.

② EXEMPLES

Programme 1 · Implémentation d'un arbre binaire

```
class Arbre:
    def __init__(self, valeur, gauche=None, droit=None):
        self.valeur = valeur
        self.gauche = gauche
        self.droit = droit

arbre = Arbre(5,
    Arbre(3, Arbre(1), Arbre(4)),
    Arbre(8, None, Arbre(9))
)
```



Programme 2 · Taille et hauteur (récursif)

```
def taille(arbre):
    if arbre is None:
        return 0
    return 1 + taille(arbre.gauche) + taille(arbre.droit)

```

```python
def hauteur(arbre):
    if arbre is None:
        return -1
    return 1 + max(hauteur(arbre.gauche), hauteur(arbre.droit))
```

Programme 3 · Parcours

```python
def prefixe(arbre):
    if arbre is None:
        return []
    return [arbre.valeur] + prefixe(arbre.gauche) + prefixe(arbre.droit)

def infixe(arbre):
    if arbre is None:
        return []
    return infixe(arbre.gauche) + [arbre.valeur] + infixe(arbre.droit)

def suffixe(arbre):
    if arbre is None:
        return []
    return suffixe(arbre.gauche) + suffixe(arbre.droit) + [arbre.valeur]

# Pour l'arbre ci-dessus :
# prefixe donne [5, 3, 1, 4, 8, 9]
# infixe  donne [1, 3, 4, 5, 8, 9]  (ordre croissant car ABR)
# suffixe donne [1, 4, 3, 9, 8, 5]
```

Programme 4 · Parcours en largeur

```python
from collections import deque

def largeur(arbre):
    if arbre is None:
        return []
    file = deque([arbre])
    resultat = []
    while file:
        noeud = file.popleft()
        resultat.append(noeud.valeur)
        if noeud.gauche:
            file.append(noeud.gauche)
        if noeud.droit:
            file.append(noeud.droit)
    return resultat
# largeur donne [5, 3, 8, 1, 4, 9]
```

Programme 5 · Recherche dans un ABR

```python
def rechercher_abr(arbre, x):
    if arbre is None:
        return False
    if x == arbre.valeur:
        return True
    elif x < arbre.valeur:
        return rechercher_abr(arbre.gauche, x)
```

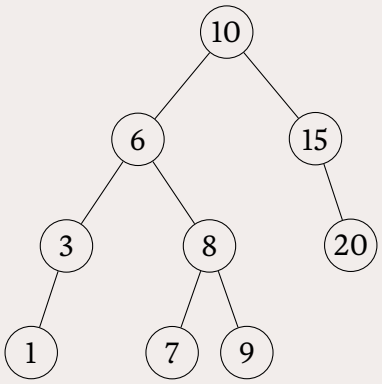
```
    else:
        return rechercher_abr(arbre.droit, x)
```

Programme 6 · Insertion dans un ABR

```
def inserer_abr(arbre, x):
    if arbre is None:
        return Arbre(x)
    if x < arbre.valeur:
        arbre.gauche = inserer_abr(arbre.gauche, x)
    elif x > arbre.valeur:
        arbre.droit = inserer_abr(arbre.droit, x)
    return arbre
```

3 EXERCICES

Exercice 1 *Propriétés d'un arbre* Soit l'arbre binaire suivant :



1. Donner la taille, la hauteur et les feuilles de cet arbre.
2. Est-ce un ABR ? Justifier.
3. Donner le résultat des quatre parcours (préfixe, infixe, suffixe, largeur).

Exercice 2 *Fonctions récursives* Écrire les fonctions suivantes :

1. `nb_feuilles(arbre)` qui renvoie le nombre de feuilles.
2. `somme(arbre)` qui renvoie la somme de toutes les valeurs.
3. `est_abr(arbre)` qui vérifie si un arbre est un ABR.

Exercice 3 *Construction d'un ABR* On insère successivement les valeurs 5, 2, 8, 1, 3, 7, 9 dans un ABR initialement vide.

1. Dessiner l'arbre obtenu.
2. Quel serait l'arbre si l'on insérait les mêmes valeurs dans l'ordre 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9 ? Quel problème cela pose-t-il ?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

1. Taille : 9 nœuds. Hauteur : 3 (chemin 10-6-3-1). Feuilles : 1, 7, 9, 20.
2. Oui, c'est un ABR. Pour chaque nœud, les valeurs à gauche sont inférieures et à droite supérieures. Par exemple, 10 a $\{1,3,6,7,8,9\}$ à gauche et $\{15,20\}$ à droite.
3. Parcours :
   - Préfixe : 10, 6, 3, 1, 8, 7, 9, 15, 20.
   - Infixe : 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20 (ordre croissant, confirmation que c'est un ABR).
   - Suffixe : 1, 3, 7, 9, 8, 6, 20, 15, 10.
   - Largeur : 10, 6, 15, 3, 8, 20, 1, 7, 9.

Corrigé de l'exercice 2.

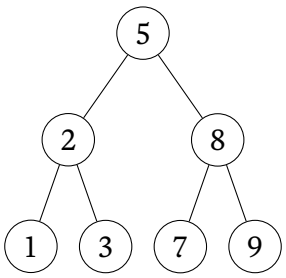
```python
def nb_feuilles(arbre):
    if arbre is None:
        return 0
    if arbre.gauche is None and arbre.droit is None:
        return 1
    return nb_feuilles(arbre.gauche) + nb_feuilles(arbre.droit)

def somme(arbre):
    if arbre is None:
        return 0
    return arbre.valeur + somme(arbre.gauche) + somme(arbre.droit)

def est_abr(arbre, mini=float('-inf'), maxi=float('inf')):
    if arbre is None:
        return True
    if arbre.valeur <= mini or arbre.valeur >= maxi:
        return False
    return (est_abr(arbre.gauche, mini, arbre.valeur) and
            est_abr(arbre.droit, arbre.valeur, maxi))
```

Principe de `est_abr` : on propage un intervalle]`mini` ; `maxi`[que chaque nœud doit respecter :

- le sous-arbre gauche doit avoir des valeurs dans]`mini` ; `valeur`[;
- le sous-arbre droit dans]`valeur` ; `maxi`[.

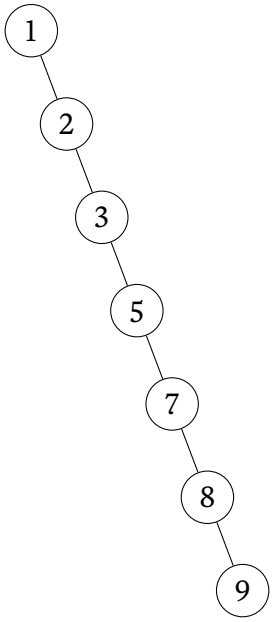
Attention : vérifier uniquement que `gauche.valeur < valeur` et `droit.valeur > valeur` ne suffit pas ! Il faut vérifier que *tous* les nœuds respectent la contrainte.

Corrigé de l'exercice 3. **1. Insertion de 5, 2, 8, 1, 3, 7, 9 :**



Arbre équilibré de hauteur 2. La recherche est en $O(\log n)$.

2. Insertion de 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9 :



L'arbre dégénère en une liste chaînée (hauteur = $n - 1 = 6$). La recherche est en $O(n)$, ce qui annule l'avantage de l'ABR.

C'est pourquoi on utilise des arbres équilibrés (AVL, arbres rouge-noir) dans les applications réelles.